数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 131-140



# Cayley 変換像の凸性による準対称ジーゲル領域の対称性条件

京都大学大学院理学研究科 甲斐 千舟*1 (Chifune Kai)
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto University

## 1 序.

等質有界領域はそれ自体, 興味深い対象であり, より広いクラスを成す等質 Kähler 多様体の研究においても重要である. 等質有界領域の標準的な非有界モデルとして知られる等質 Siegel 領域は, 右半平面 (あるいは上半平面) の多次元への一般化であり affine 等質である. 等質 Siegel 領域のクラスの中でも特に, 対称 Siegel 領域は重要な位置を占めており, 現在までに様々な特徴付けが得られている. 筆者の一連の研究 [5], [7], [8] は, 等質 Siegel 領域に対して自然に定義される Cayley 変換の像の凸性という簡明な条件によって, 対称 Siegel 領域を特徴付けようとするものである. このような特徴付け定理は論文 [8] で完成されたが, 本稿では一般の等質 Siegel 領域ではなく, 準対称 Siegel 領域と呼ばれる領域のクラスに限定して話を進める. 等質管状領域 (第 1 種等質 Siegel 領域) の場合を扱った論文 [5] (野村隆昭氏との共同研究) や, [6] も参照されたい.

本稿で扱う準対称 Siegel 領域は代数的な条件で定義され, 対称 Siegel 領域の自然な拡張になっている. 対称 Siegel 領域と同じく完全な分類も得られている [16, p.240], [17]. Bergman 計量に関する正則双断面曲率の non-positivity によって準対称 Siegel 領域を等質 Siegel 領域の中で特徴付ける仕事もある [4]. 本稿のように, 準対称 Siegel 領域のクラスの中で対称 Siegel 領域を特徴付ける研究としては, Bergman 計量に関する断面曲率の non-positivity によって特徴付けたもの [1] や, 領域に付随する Jordan 代数の表現を用いたもの [2, Section 3.7], [16, Theorem V.3.5], 無限小自己同型に関するもの [3, Theorem 3.3], [16, Proposition V.4.8] などがある.

Cayley 変換について説明しよう. 対称 Siegel 領域は非コンパクト型の対称 Hermite 空間なので, 標準的な有界領域実現である Harish-Chandra 実現をもつ. 1965 年に Korányi と Wolf は, 対称 Siegel 領域を Harish-Chandra 実現に写す Cayley 変換 (の逆変換) を

*1 E-mail: kai@math.kyoto-u.ac.jp
日本学術振興会特別研究員 (DC2).

Lie 群論を用いて定義した．この Cayley 変換の像である Harish-Chandra 実現はあるノルムに関する開単位球であることが証明されており，これは明らかに凸集合である．ちなみにこの凸性に関連して，階数が 2 以上の既約な有界対称領域 (これはある対称 Siegel 領域に正則同相である) の場合に，その有界領域実現で凸なものは本質的に Harish-Chandra 実現に一致することが [11] で証明されている．これは言い換えれば，階数が 2 以上の既約な対称 Siegel 領域の有界領域実現で凸なものは本質的に Cayley 変換に限るということである．元の話に戻ろう．Dorfmeister は 1980 年に出版された論文において，Korányi と Wolf による Cayley 変換の準対称 Siegel 領域への自然な拡張を，Jordan 代数の枠組みで定義した．この Cayley 変換を用いて，本稿の主定理は次のように述べられる．

**定理 1.1** $D$ を既約な準対称 Siegel 領域とし，その Cayley 変換を $\mathcal{C}$ で表す．このとき Cayley 変換像 $\mathcal{C}(D)$ が凸集合であることと，$D$ が対称であることは同値である．

本稿ではまず §3 で Cayley 変換の具体例を見たのち，§4 で準対称 Siegel 領域の Cayley 変換を導入する．§5 では対称 Siegel 領域の Cayley 変換像を簡単に記述する．参考として最後のセクションに，非対称 Siegel 領域の Cayley 変換像の非凸性を示す計算結果を掲載した．

## 2 等質 Siegel 領域

有限次元の実ベクトル空間 $V$ の中に開凸錐 $\Omega$ が与えられているとし，$\Omega$ は直線を含まないとする．$V$ の複素化を $W$ とおき，実形 $V$ に関する複素共役を $w \mapsto w^*$ で表す．$U$ を有限次元の複素ベクトル空間とする．Sesquilinear form $Q : U \times U \to W$ は Hermitian かつ $\Omega$-positive であるとする:

$$Q(u,u') = Q(u',u)^* \qquad (u,u' \in U),$$
$$Q(u,u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \text{ for any non-zero } u \in U.$$

これを用いて **Siegel 領域** $D$ が次のように定義される:

$$D := \{(u,w) \in U \times W \mid \operatorname{Re} w - \tfrac{1}{2}Q(u,u) \in \Omega\}. \tag{2.1}$$

本稿では $D$ は等質かつ既約であるとする．このとき $\Omega$ は既約な等質錐である．すなわち，$\Omega$ の線形自己同型群

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}$$

が $\Omega$ に推移的に作用している．

## 3 対称 Siegel 領域の Cayley 変換の具体例

$p, q$ を $1 \leq p < q$ を満たす整数とし, $I_{p,q}$ 型の対称有界領域に正則同相な対称 Siegel 領域の Cayley 変換をみてみよう. 土台となるベクトル空間として,

$$\begin{aligned} V &:= \mathrm{Herm}(p;\mathbb{C}) && (p\text{ 次 Hermite 行列の全体}),\\ W &:= V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Mat}(p;\mathbb{C}) && (p\text{ 次複素正方行列の全体}),\\ U &:= \mathrm{Mat}(p, q-p;\mathbb{C}) && (\text{大きさ } p \times (q-p) \text{ の複素行列の全体}) \end{aligned}$$

をとる. 等質錐 $\Omega$ は $\Omega := \{X \in V \mid X \gg 0\}$ ($\gg$ は正定値であることを表す) で与える. $\Omega$-positive な Hermitian sesquilinear map $Q : U \times U \to W$ を $Q(u_1, u_2) := u_1 u_2^*$ $(u_1, u_2 \in U)$ で定義する. これに対応する対称 Siegel 領域は

$$D := \{(u, w) \in U \times W \mid w + w^* - uu^* \gg 0\}$$

である. $Z := \mathrm{Mat}(p, q;\mathbb{C})$ とおく. 写像 $U \times W \ni (u, w) \mapsto (u\,w) \in Z$ によって $U \times W$ と $Z$ を同一視する. $I_{p,q}$ 型の有界対称領域は

$$B := \{z \in Z \mid I_p - zz^* \gg 0\}$$

で与えられる ($I_p$ は $p$ 次単位行列を表す). $z \in Z$ を $\mathbb{C}^q$ から $\mathbb{C}^p$ への線型作用素とみて, 標準的なノルムに関する $z$ の作用素ノルムを $\|z\|_{\mathrm{op}}$ と書くことにする. 明らかに,

$$B = \{z \in Z \mid \|z\|_{\mathrm{op}} < 1\}$$

なので, $B$ は凸集合である.

対称 Siegel 領域 $D$ の Cayley 変換は次のように定義される:

$$\mathcal{C}(u, w) = \bigl(2(w+E)^{-1}u, (w-E)(w+E)^{-1}\bigr) \qquad ((u, w) \in U \times W). \tag{3.1}$$

線型写像 $T$ を $T(u, w) := (\sqrt{2}u, w)$ $((u, w) \in U \times W)$ と定義すると,

$$\mathcal{C}(D) = T(B)$$

がわかる. 実際, $z := (T^{-1} \circ \mathcal{C})(u, w)$ $((u, w) \in U \times W)$ とおくと

$$I_p - zz^* = 2(w+E)^{-1}(w + w^* - uu^*)\bigl((w+E)^{-1}\bigr)^*$$

が成立するので,

$$I_p - zz^* \gg 0 \iff w + w^* - uu^* \gg 0.$$

よって $(T^{-1} \circ \mathcal{C})(D) = B$, すなわち $\mathcal{C}(D) = T(B)$ となる.

## 4 準対称 Siegel 領域の Cayley 変換

$D$ を (2.1) で定義される等質 Siegel 領域とする. $D$ は有界領域に正則同相であるから, $D$ の Bergman 空間は再生核 $\kappa$ をもつ. 領域 $\Omega + iV \subset W$ 上の正則関数 $\eta$ が存在して, $\kappa$ を次のように書くことができる:

$$\kappa(z_1, z_2) = \eta(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2)) \qquad (z_j = (u_j, w_j) \in D,\ j = 1, 2).$$

任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する. $V$ 上の双線型形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ を

$$\langle x|y\rangle_\eta := D_x D_y \log \eta(E) \qquad (x, y \in V)$$

で定義すると, これは正定値内積を定める. ただし $C^\infty$ 級関数 $f$ と $v, x \in V$ に対し $D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tv)\big|_{t=0}$ である. 等質 Siegel 領域 $D$ が**準対称 (quasisymmetric)** であるとは, 等質錐 $\Omega$ が内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ に関して自己双対, すなわち $\Omega$ の双対錐

$$\Omega^\eta := \{x \in V \mid \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \langle x|y\rangle_\eta > 0\}$$

が $\Omega$ と一致することをいう. $D$ が準対称であることと, $V$ に非結合的な積 $\circ$ を

$$\langle x \circ y|z\rangle_\eta = -\tfrac{1}{2} D_x D_y D_z \log \eta(E) \qquad (x, y, z \in V)$$

によって入れたときに $V$ が Jordan 代数であることは同値である. ここで $V$ が Jordan 代数であるとは, 任意の $x, y \in V$ に対して

$$x \circ y = y \circ x,$$
$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$$

が成立することをいう.

$D$ を (既約な) 準対称 Siegel 領域とする. $V$ は $E$ を単位元とする Jordan 代数であり, 積 $\circ$ を $W$ に複素双線型に拡張することによって, $W$ は自然に複素 Jordan 代数となる. $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ を $W$ に双線型に拡張しておく. $U$ 上の正定値 Hermite 内積 $(\cdot|\cdot)_\eta$ を

$$(u|u')_\eta := \langle Q(u, u')|E\rangle_\eta \qquad (u, u' \in U)$$

によって定義する. 各 $w \in W$ に対し, $U$ 上の線型作用素 $\varphi(w)$ を次のように定める:

$$(\varphi(w)u|u')_\eta = \langle w|Q(u, u')\rangle_\eta \qquad (u, u' \in U).$$

明らかに $\varphi(E) = I$ (恒等写像) であり, $\varphi : W \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} U$ も線型である. このとき, Dofmeister による次の命題がある ([12, Proposition 4.5] も参照されたい):

**命題 4.1 ([3, Theorem 2.1 (6)])** $\varphi$ は複素 Jordan 代数 $W$ の $*$ 表現である．すなわち任意の $w, w' \in W$ に対し，

$$\varphi(w^*) = \varphi(w)^* \qquad (\text{右辺は } (\cdot|\cdot)_\eta \text{ に関する adjoint})$$
$$\varphi(w \circ w') = \tfrac{1}{2}(\varphi(w)\varphi(w') + \varphi(w')\varphi(w))$$

が成立する．

準対称 Siegel 領域 $D$ の **Cayley 変換** $\mathcal{C}$ は次のように定義される：

$$\mathcal{C}(u, w) := \big(2\varphi((w+E)^{-1})u,\ (w-E)\circ(w+E)^{-1}\big) \qquad ((u, w) \in U \times W). \quad (4.1)$$

$\mathcal{C}$ は $\overline{D}$ ($D$ の閉包) を含む開集合の上で正則であり，$D$ を $\mathcal{C}(D)$ に双正則に写す．また $\mathcal{C}(D)$ は有界である．

**例 4.2** $D$ を §3 で扱った対称 Siegel 領域とする．Bergman 核に付随する関数 $\eta$ は $\eta(w) = \det(w)^{-(p+q)/2}$ $(w \in W)$ で与えられる．$E$ として $p$ 次の単位行列をとると，付随する内積は $\langle x|y\rangle_\eta = \frac{1}{2}(p+q)\mathrm{trace}(xy)$ $(x, y \in V)$ であり，実際に $\Omega$ はこの内積に関して自己双対である．$W$ に積 $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ $(x, y \in V)$ を入れることによって，$W$ は $E$ を単位元とする複素 Jordan 代数となる．$w \in W$ の Jordan 代数における逆元は $w$ の逆行列と一致する．$W$ の $*$ 表現 $\varphi$ は $\varphi(w)u = wu$ $(w \in W, u \in U)$ で与えられる．$w \in W$ に対して $w - E$ と $(w+E)^{-1}$ が可換であることに注意すると，Cayley 変換 (4.1) が (3.1) と等しくなることがわかる．

## 5 対称 Siegel 領域の Cayley 変換像の凸性

(2.1) で定義される等質 Siegel 領域 $D$ が対称であると仮定する．$D$ に付随する Jordan triple system (JTS) を用いて，Cayley 変換の像を記述しよう (詳細については [10, §10], [9], [7] を参照されたい)．対称領域は準対称であるから，§4 で行ったようにして，$W = V_{\mathbb{C}}$ は複素 Jordan 代数となり，$W$ の表現 $\varphi$ を作ることができる．

複素ベクトル空間 $Z$ と real trilinear map $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : Z \times Z \times Z \to Z$ の組 $(Z, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ が **Hermitian JTS** であるとは，以下の 3 つの条件が満たされていることをいう：

- $\{x, y, z\}$ は $x, z$ に関して複素線型であり，$y$ に関して複素反線型である．
- $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$．
- $\{a, b, \{x, y, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\} + \{x, y, \{a, b, z\}\}$．

$Z$ が Hermitian JTS のとき, $x, y \in Z$ に対し, $x\Box y \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} Z$ を $(x\Box y)z := \{x, y, z\}$ で定義する. Sesquilinear form $(x|y)_{\mathrm{tr}} := \mathrm{trace}\, x\Box y$ が $Z$ の 正定値 Hermite 内積を定めるとき, $Z$ は positive であるという.

対称 Siegel 領域には以下のようにして, positive Hermitian JTS が対応する. $Z := U \oplus W$ とおく. Real trilinear map $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ を次のように定義する: $x, y, z \in U,\ a, b, c \in W$ に対し,

$$\begin{aligned}\{x+a, y+b, z+c\} := \bigl(\tfrac{1}{2}\varphi(c)\varphi(b^*)x + \tfrac{1}{2}\varphi(a)\varphi(b^*)z + \tfrac{1}{2}\varphi(Q(x,y))z + \tfrac{1}{2}\varphi(Q(z,y))x\bigr)\\ + \bigl((ab^*)c + a(b^*c) - b^*(ac) + \tfrac{1}{2}Q(x, \varphi(c^*)y) + \tfrac{1}{2}Q(z, \varphi(a^*)y)\bigr).\end{aligned} \tag{5.1}$$

このとき $(Z, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ は positive Hermitian JTS になる. 実際, 次の等式が成立する: $c_1$ を正の定数として,

$$(x+a|x+a)_{\mathrm{tr}} = c_1\bigl((x|x)_\eta + \langle a|a^*\rangle_\eta\bigr).$$

$Z$ 上の線型作用素 $T$ に対し, $(\cdot|\cdot)_{\mathrm{tr}}$ に関する $T$ の作用素ノルムを $\|T\|$ で表す. $z \in Z$ に対し,

$$|z| := \|z\Box z^*\|^{1/2}$$

とおく. $|\cdot|$ はノルムになることが知られており, スペクトル・ノルムと呼ばれる. $B := \{z \in Z \mid |z| < 1\}$ とおく. $Z$ 上のアファイン変換 $T$ を $T(u, w) := (\sqrt{2}u, w)$ で定義する.

**命題 5.1** $\mathcal{C}(D) = T(B)$ が成立する. よって特に $\mathcal{C}(D)$ は凸集合である.

**例 5.2** §3 で扱った対称 Siegel 領域の場合をみてみる. (5.1) で定義される triple product は $\{z_1, z_2, z_3\} = \frac{1}{2}(z_1 z_2^* z_3 + z_3 z_2^* z_1)$ $(z_1, z_2, z_3 \in Z)$ と書ける. トレースから決まる内積は $(z_1|z_2)_{\mathrm{tr}} = \mathrm{trace}(z_1 z_2^*)$ $(z_1, z_2 \in Z)$ となり, スペクトルノルムは §3 の $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ に一致する.

# 6 主定理の証明の概略

§4 の記号を踏襲する. $D$ を既約な準対称 Siegel 領域とする. $E_1, \ldots, E_r \in V$ を $V$ の Jordan frame とする. すなわち $E_1, \ldots, E_r$ は互いに直交する原始冪等元であり, $E_1 + \cdots + E_r = E$ を満たすとする. 整数 $r$ は Jordan frame の取り方によらず一定であ

り, $V$ の階数と呼ばれる. $U_k := \varphi(E_k)U$ $(k = 1, \dots, r)$ とおく. Cayley 変換像の凸性から領域の対称性を導出するにあたって, 次の命題を用いる.

**命題 6.1 ([2, Corollary 1])** $D$ が対称であるための必要十分条件は, 任意の $j, k$ $(1 \le j < k \le r)$, $u_j \in U_j, u_k \in U_k$ に対して

$$\varphi(Q(u_j, u_k))u_j = 0$$

が成立することである.

$\mathcal{C}(D)$ が凸集合であると仮定する. 任意の $u_j \in U_j, u_k \in U_k$ をとり, 次の 2 点を考える:

$$\begin{aligned} z_1 &:= \left(u_j + u_k,\ \tfrac{1}{2}Q(u_j + u_k, u_j + u_k) + i\,\mathrm{Im}\,Q(u_j, u_k)\right), \\ z_2 &:= \left(-u_j + u_k,\ \tfrac{1}{2}Q(-u_j + u_k, -u_j + u_k) - i\,\mathrm{Im}\,Q(u_j, u_k)\right). \end{aligned}$$

$z_1, z_2$ は $D$ の Shilov 境界

$$\Sigma = \{(u, w) \in U \times W \mid \mathrm{Re}\,w - \tfrac{1}{2}Q(u, u) = 0\}$$

に属している. 定数をいくつか定義しておく:

$$\begin{gathered} q_{jk} := \langle Q(u_j, u_k) | Q(u_j, u_k) \rangle_\eta, \qquad \beta_0 := r^{-1}\langle E|E\rangle_\eta, \\ \delta_j := 1 + (2\beta_0)^{-1}\|u_j\|_\eta^2, \qquad \delta_k := 1 + (2\beta_0)^{-1}\|u_k\|_\eta^2, \qquad \tau := \delta_j\delta_k - (2\beta_0)^{-1}q_{jk}. \end{gathered}$$

まず $\mathcal{C}(z_1)$ と $\mathcal{C}(z_2)$ を計算して, $\mathcal{C}(z_1)$ と $\mathcal{C}(z_2)$ の中点 $\xi$ を求める. 次に $\mathcal{C}^{-1}(\xi)$ を計算すると,

$$\mathcal{C}^{-1}(\xi) = (u_k - \delta_j^{-1}\varphi(Q(u_j, u_k))u_j, (\tau\delta_k^{-1} - 1)E_j + (\tau\delta_j^{-1} - 1)E_k)$$

を得る. $\mathcal{C}$ は $\overline{D}$ を含む開集合の上で連続であるから, $\mathcal{C}(\overline{D})$ も凸集合である. よって $\mathcal{C}^{-1}(\xi) \in \overline{D}$ となる. 計算を進めると $\varphi(Q(u_j, u_k))u_j = 0$ が得られ (少々技巧的なので詳細は省略する), 命題 6.1 より $D$ は対称であることが従う.

## 7 非対称 Siegel 領域の Cayley 変換像の非凸性

非対称な準対称 Siegel 領域の具体例を与えよう. $V := \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ (2 次の実対称行列の空間) とおく. $V$ の複素化は $W = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{C})$ である. 等質錐 $\Omega$ を $\Omega := \{X \in V \mid X \gg 0\}$ で与える. $U := \mathbb{C}^2$ とおく. Hermitian sesquilinear map $Q : U \times U \to W$ を次のように定める:

$$Q\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} u_1\overline{v_1} & \frac{1}{2}(u_1\overline{v_2} + u_2\overline{v_1}) \\ \frac{1}{2}(u_1\overline{v_2} + u_2\overline{v_1}) & u_2\overline{v_2} \end{pmatrix}.$$

これらから定義される等質 Siegel 領域 $D$ の Bergman 核から決まる関数 $\eta$ は $\eta(w) = \det(w)^{-2}$ $(w \in W)$ である. 付随する正定値内積は $\langle x|y\rangle_\eta = 2\,\mathrm{trace}(xy)$ $(x, y \in V)$ となるので, $D$ は準対称であることが容易にわかる. $W$ に入る Jordan 代数の構造や表現 $\varphi$ は §3 で扱った対称 Siegel 領域と同様の自然なものである.

$V$ の Jordan frame として

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をとる. $U_j := \varphi(E_j)U$ $(j = 1, 2)$ とおくと,

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \right\}.$$

0 でない $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ に対して $\varphi(Q(u_1, u_2))u_1 \neq 0$ であることが容易に確かめられるので, 命題 6.1 より $D$ は非対称である.

2 つのベクトル $u_1 := {}^t(3, 0), u_2 := {}^t(0, 1+i) \in U$ をとり, $D$ の Shilov 境界に属する次の 2 点を考える:

$$\begin{aligned} z_1 &:= \bigl(u_1 + u_2, \tfrac{1}{2}Q(u_1 + u_2, u_1 + u_2) + i\,\mathrm{Im}\,Q(u_1, u_2)\bigr), \\ z_2 &:= \bigl(-u_1 + u_2, \tfrac{1}{2}Q(-u_1 + u_2, -u_1 + u_2) - i\,\mathrm{Im}\,Q(u_1, u_2)\bigr). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}(z_1)$ と $\mathcal{C}(z_2)$ の中点が $\mathcal{C}(\overline{D})$ に入っていないことは計算で確かめられる. Cayley 変換像 $\mathcal{C}(D)$ を $\mathcal{C}(z_1)$ と $\mathcal{C}(z_2)$, 原点の 3 点を通る平面で切断した様子をコンピューターで計算したものが, 図 1 である.

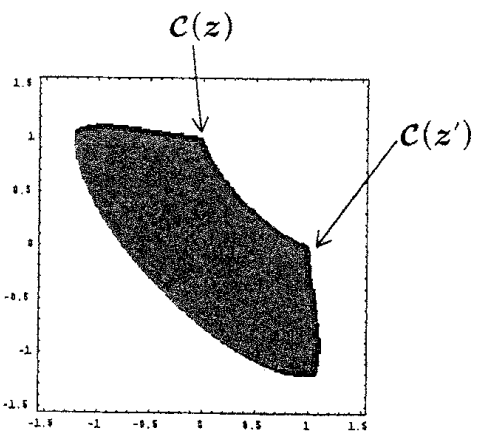


図 1

# 参考文献

[1] J. E. D'Atri, *Sectional curvatures and quasisymmetric domains*, J. Diff. Geom. **16** (1981), 11–18.

[2] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister, *Flat totally geodesic submanifolds of quasisymmetric Siegel domains*, Geom. Dedicata **28** (1988), 321–336.

[3] J. Dorfmeister, *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains*, Amer. J. Math. **102** (1980), 537–563.

[4] M. Fahl, *Eine geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete*, Bonner Mathematische Schriften **335**, 2000.

[5] C. Kai, T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, Diff. Geom. Appl. **23** (2005), 38–54.

[6] 甲斐 千舟, 野村隆昭, Cayley 変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け, 数理解析研究所講究録 **1410**, 113–123.

[7] C. Kai, *A symmetry characterization of quasisymmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, J. Lie Theory **16** (2006), 47–56.

[8] C. Kai, *A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, preprint.

[9] A. Korányi, J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math. **81** (1965), 265–288.

[10] O. Loos, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Lecture Notes, Univ. California at Irvine, 1977.

[11] N. Mok, I-H. Tsai, *Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank $\geq 2$*, J. Reine Angew. Math. **431** (1992), 91–122.

[12] T. Nomura, *On Penney's Cayley tranform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185–206.

[13] T. Nomura, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, Transform. Groups **6** (2001), 227–260.

[14] T. Nomura, *Berezin transforms and Laplace-Beltrami operators on homogeneous Siegel domains*, Diff. Geom. Appl. **15** (2001), 91–106.

[15] T. Nomura, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal. **198** (2003), 229–267.

[16] I. Satake, Albebraic structures of symmetric domains, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo-Princeton, 1980.

[17] M. Takeuchi, *On symmetric Siegel domains*, Nagoya Math. J. **59** (1975), 9–44.